

Нелинейный тест на единичный корень при наличии скачка среднего

К.П. Глущенко

Институт экономики и организации промышленного производства
Сибирского отделения
Российской академии наук

пр. Лаврентьева 17, 630090 Новосибирск, Россия
glu@nsu.ru

Первый вариант: август 2004 г.
Настоящий вариант: февраль 2005 г.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ТЕСТ НА ЕДИНИЧНЫЙ КОРЕНЬ ПРИ НАЛИЧИИ СКАЧКА СРЕДНЕГО

К.П. Глущенко

Рассматривается тестирование временного ряда со структурным скачком его среднего на единичный корень. Для этого используется нелинейная относительно коэффициентов тестовая регрессия, дающая асимптотически эффективные оценки. Оцениваются конечно-выборочные и квазиасимптотические эмпирические распределения статистики теста на единичный корень, которые сравниваются с распределениями, связанными с перроновскими регрессиями. Обнаружено, что асимптотическими распределениями статистики нелинейного теста являются распределения Дикки-Фуллера. Нелинейный тест оказывается более мощным, чем тест, основанный на линейной модели.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: структурный скачок, нелинейная регрессия, нестандартное распределение.

КОДЫ JEL: C12, C15, C16, C22

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с пионерных работ П. Перрона (Perron, 1989) и П. Раппопорта и Л. Райхлин (Rappoport and Reichlin, 1989), во всё большем числе работ изучаются различные аспекты структурных скачков во временных рядах, такие как учёт изменений в каком-либо или во всех параметрах модели временного ряда (константе, коэффициенте тренда, авторегрессионном коэффициенте, дисперсии остатков регрессии), неизвестный момент скачка, множественные скачки и т.д. – см., например, Hansen (1997, 2001), Bartley *et al.* (2001), Lanne *et al.* (2002), если упомянуть лишь немногих. Тем не менее довольно простой случай единичного структурного скачка, изменяющего только среднее временного ряда в известный момент времени, по-прежнему представляет интерес, например, при проверке выполнения закона единой цены или паритета покупательной способности.

Наиболее распространённым методом тестирования ряда на стационарность в указанном случае является метод, предложенный П. Перроном (Perron, 1990) и П. Перроном и Т. Фольгесангом (Perron and Vogelsang, 1992), вошедший во многие учебники по эконометрике временных рядов как стандартный. Однако он оставляет место для улучшения. Дело в том, что тестовые модели временного ряда, используемые в данном методе, фактически являются линейными приближениями «истинных», которые нелинейны по коэффициентам. Поэтому оценки коэффициента авторегрессии, будучи состоятельными, оказываются асимптотически неэффективными. Следовательно, можно ожидать, что использование моделей, более адекватно описывающих рассматриваемый процесс, позволит получить тест с лучшими свойствами.

В данной работе используется нелинейная спецификация тестовых уравнений, описывающих авторегрессионный процесс первого порядка с одномоментным скачком среднего процесса, при этом рассматривается уравнение с константой и без константы (для эмпирических целей такой тест был использован в работе

Gluschenko (2004) для проверки выполнения закона единой цены в российской экономике). В качестве тестовой статистики используется t -отношение авторегрессионного коэффициента. Оценены конечно-выборочные и квазиасимптотические распределения данной статистики, эти распределения сравниваются с распределениями, связанными с уравнениями перроновского типа.

Как и распределение Перрона, конечно-выборочные распределения тестовой статистики, основанной на нелинейных регрессиях, зависят от момента, когда произошёл скачок. В асимптотическом же случае – не зависят. Наиболее интересное свойство статистики нелинейного теста состоит в том, что их предельные распределения являются распределениями Дикки-Фуллера. Выяснено, что нелинейный тест имеет бóльшую мощность, чем тест, основанный на уравнениях перроновского типа.

Остальная часть работы организована следующим образом. В разделе 2 вводятся нелинейные тестовые уравнения. В разделе 3 приводятся и обсуждаются оценённые распределения статистики для тестирования временных рядов со скачком на единичный корень, они также сравниваются с распределениями статистик, основанных на линейных уравнениях. В разделе 4 представлены результаты оценки мощности тестов. В разделе 5 показано эмпирическое приложение нелинейного теста к проверке выполнения закона единой цены в России (при этом соответствующие временные ряды содержат скачок, вызванный финансовым кризисом 1998 г. в стране). Заключение представлено в разделе 6.

2. МОДЕЛИ

Рассмотрим авторегрессионный процесс первого порядка со скачком, изменяющим среднее процесса с μ_0 на μ_1 в известный момент времени $t = \theta + 1$:

$$\begin{aligned}y_t &= \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)B_{\theta t} + v_t \quad (t = 0, 1, \dots, T), \\v_t &= (\lambda + 1)v_{t-1} + \varepsilon_t \quad (t = 1, \dots, T), \\v_0 &= \xi,\end{aligned}\tag{1}$$

где ε_t – гауссовский белый шум, ξ – постоянная (которая может, например, давать

$y_0 = 0$) или случайная величина, $B_{\theta t}$ – фиктивная переменная скачка (ступенька), такая что $B_{\theta t} = 0$ при $t \leq \theta$ и 1 в противном случае. В литературе для описания скачка обычно используют две фиктивные переменные – импульс и ступеньку. Однако это излишне, поскольку переменная импульса, принимающая значение 1 при $t = \theta + 1$ и 0 в противном случае, может быть представлена как $B_{\theta t} - B_{\theta, t-1}$ или $\Delta B_{\theta t}$, где Δ обозначает оператор первой разности.

Интерес состоит в том, чтобы различить гипотезы $H_0: \lambda = 0$ и $H_1: \lambda < 0$. При этом в качестве тестовой статистики будет использоваться t -отношение λ , $\tau = \hat{\lambda} / \hat{\sigma}_{\lambda}$. Эта t -статистика обозначена через τ (с индексом, указывающим её принадлежность конкретному тесту), чтобы подчеркнуть, что она имеет распределение, отличное от стандартного распределения Стьюдента.

Объединив первые два выражения в (1), приходим к нелинейной модели $\Delta y_t = \alpha + \lambda y_{t-1} + \gamma(B_{\theta t} - (\lambda+1)B_{\theta, t-1}) + \varepsilon_t$, или

$$\Delta y_t = \alpha + \lambda y_{t-1} + \gamma B_{\theta t} - \gamma(\lambda+1)B_{\theta, t-1} + \varepsilon_t, \quad (2)$$

где $\alpha \equiv -\lambda\mu_0$ и $\gamma \equiv \mu_1 - \mu_0$; здесь и далее $t = 1, \dots, T$.

Предположив, что исходное значение среднего в (1) равно нулю, $\mu_0 = 0$, получим модель без константы:

$$\Delta y_t = \lambda y_{t-1} + \gamma B_{\theta t} - \gamma(\lambda+1)B_{\theta, t-1} + \varepsilon_t. \quad (3)$$

При выполнении нулевой гипотезы наличия единичного корня, $\lambda = 0$, в (2) и (3) остаются только импульсы и обе регрессии вырождаются в

$$\Delta y_t = \gamma(B_{\theta t} - B_{\theta, t-1}) + \varepsilon_t. \quad (4)$$

При использовании таких обозначений, спецификация модели AR(1) со структурным скачком в духе Perron (1990) – уравнение перроновского типа – имеет вид

$$\Delta y_t = \alpha + \lambda y_{t-1} + \psi B_{\theta t} + \delta \Delta B_{\theta t} + \varepsilon_t, \quad (5)$$

или, при $\gamma \equiv \psi + \delta$,

$$\Delta y_t = \alpha + \lambda y_{t-1} + \gamma B_{\theta t} - \delta B_{\theta, t-1} + \varepsilon_t. \quad (6)$$

В случае отсутствия константы модель перроновского типа принимает вид

$$\Delta y_t = \lambda y_{t-1} + \gamma B_{\theta} - \delta B_{\theta,t-1} + \varepsilon_t. \quad (7)$$

Именно (6) и (7) – обычно в виде, сходном с (5) – и их модификации обычно применяются для тестирования на единичный корень во временном ряде, имеющим скачок среднего, при этом параметризованная нулевая гипотеза совпадает с (4). Отметим, что поскольку рассматривается процесс AR(1), исчезает различие между моделью с аддитивным выбросом и моделью с выбросом в остатке регрессии, рассматриваемыми в Perron (1990) и Perron and Vogelsang (1992). Сравнивая (2) и (3) с (6) и (7), можно видеть, что в последних уравнениях не учитывается ограничение $\delta = \chi(\lambda + 1)$, что превращает их в линейные. Но для обеспечения линейности в некоторой мере в жертву приносится адекватное описание свойств процесса (1).

Преобразуем модель (2) так, чтобы она имела обычное представление с двумя фиктивными переменными:

$$\Delta y_t = \alpha + \lambda y_{t-1} - \gamma \lambda B_{\theta} + \chi(\lambda + 1) \Delta B_{\theta} + \varepsilon_t. \quad (8)$$

Таким образом, на самом деле $\psi = -\gamma\lambda$ и $\delta = \chi(\lambda + 1)$. А значит, коэффициенты ψ и δ в (5) сами по себе не имеют ясной интерпретации, тогда как параметр γ в нелинейных моделях имеет простой смысл: это «высота» скачка, $\mu_1 - \mu_0$. В то же время резонно ожидать, что в крайних случаях отсутствия автокорреляции ($\lambda = -1$) и единичного корня ($\lambda = 0$) ψ и δ соответственно будут представлять высоту скачка. При отсутствии автокорреляции лаги переменной скачка B_{θ} не должны влиять на текущее значение объясняемой переменной. Действительно, при $\lambda = -1$ в (8) $\psi = \gamma$ и $\delta = 0$, и остаётся только ступенька: $\Delta y_t = \alpha - y_{t-1} + \gamma B_{\theta} + \varepsilon_t$, т.е. $y_t = \mu_0 + \gamma B_{\theta t} + \varepsilon_t$. Но это не так, когда мы имеем дело с (5), поскольку ψ и δ не зависят друг от друга и от λ ; по-прежнему будет иметь место комбинация ступеньки и импульса, как в (8) при $-1 < \lambda < 0$. Аналогичным образом, приняв $\lambda = 0$ в (8), получим $\psi = 0$ и $\delta = \chi$, т.е. остаётся лишь импульс (4), $\Delta y_t = \gamma \Delta B_{\theta} + \varepsilon_t$. Однако нет никаких причин, по которым бы ψ стало равным нулю в (5) в случае единичного корня. Таким образом, в то

время как параметризация нулевой гипотезы как (4) явно следует из самих нелинейных моделей, она не вытекает из моделей перроновского типа и вводится искусственно.

Более того, отсутствие ограничений на параметры моделей перроновского типа приводят к тому, что хотя оценки параметров состоятельны, они асимптотически неэффективны. Следовательно, можно ожидать, что получение эффективных оценок при использовании более адекватных нелинейных моделей даст тест на единичный корень, обладающий лучшими свойствами.

Обозначим тестовые статистики для (2) и (3) соответственно как $\tau_{\mu NL}$ и $\tau_{0 NL}$, а статистики для (6) и (7) – как $\tau_{\mu P}$ и $\tau_{0 P}$. Используя известные выражения для оценок λ (точнее, оценок $\rho = \lambda + 1$) и их t -отношений, П. Перрон (Peron, 1990) вывел асимптотическое распределение $\tau_{\mu P}$ в условиях нулевой гипотезы (аналогичным образом может быть выведено распределение $\tau_{0 P}$). Однако нелинейность тестовых уравнений (2) и (3) не позволяет получить такие выражения в замкнутом виде и поэтому нельзя получить аналитически даже асимптотические распределения $\tau_{\mu NL}$ и $\tau_{0 NL}$. Таким образом, единственный способ исследовать свойства тестов на единичный корень, основанных на этих уравнениях, состоит в том, чтобы изучить числовые распределения, оцениваемые с помощью метода Монте-Карло.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕСТОВЫХ СТАТИСТИК

Для получения числовых распределений тестовых статистик в условиях нулевой гипотезы единичного корня используется порождающий данные процесс вида $y_t = y_{t-1} + \gamma(B_{\theta t} - B_{\theta,t-1}) + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t \sim \text{iid } N(0,1)$. В каждом эксперименте оценивались распределения $\tau_{\mu NL}$, $\tau_{0 NL}$, $\tau_{\mu P}$ и $\tau_{0 P}$ по одному и тому же набору 200000 сгенерированных временных рядов. Для сравнения оценивались также распределения τ -статистик Дикки-Фуллера, связанных с регрессиями с константой и без константы, τ_{μ} и τ_0 , соответственно. Модели (2) и (3) оценивались с помощью нелинейного метода наименьших квадратов с применением алгоритма Маркара (Marquardt). Для оценивания использовались встроенные процедуры эконометрического пакета

EViews; см. Quantitative Micro Software (2004). Точность оценки (измеряемая относительно нормы вектора нормированных коэффициентов регрессии) была принята равной 10^{-7} .

Эксперименты – а значит, и соответствующие распределения – отличаются набором параметров $\{T, \Theta, \gamma, y_0\}$, где Θ – доля длины временного ряда до момента скачка: $\Theta = \theta/T$. Распределения $\tau_{\mu NL}$ и $\tau_{0 NL}$, а также $\tau_{\mu P}$ и $\tau_{0 P}$ оказались не зависящим от параметра γ , поэтому результаты приводятся для случая $\gamma = 0$ (таким образом, порождающий данные процесс на самом деле является чистым случайным блужданием, $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$). Начальное значение y_0 принималось постоянным или случайным, $y_0 \sim N(0, \zeta^2)$, в последнем случае y_0 распределено независимо от $\{\varepsilon_t\}$. Для получения «квазиасимптотических» распределений использовались ряды длиной $T = 10000$. Судя по тому, что оцененные критические значения статистик Дикки-Фуллера и перроновских статистик $\tau_{\mu P}$ оказались для $T = 10000$ близкими к асимптотическим величинам, такой размер выборки можно полагать хорошим «приближением бесконечности».

В следующих трёх подразделах приводятся и обсуждаются полученные результаты. Если не указано иное, результаты приводятся для основного случая $y_0 = 0$ (распределения $\tau_{\mu P}$ и $\tau_{\mu NL}$ оказались, как и должны были, не зависящими от начальных значений).

3.1 Статистики для регрессий с константой

В табл. 1 приведены отдельные точки полученных распределений статистик теста на единичный корень, связанных с регрессиями (2) и (6), для конечных выборок, а на рис. 1 – 10-процентные хвосты некоторых распределений.

ТАБЛИЦА I.

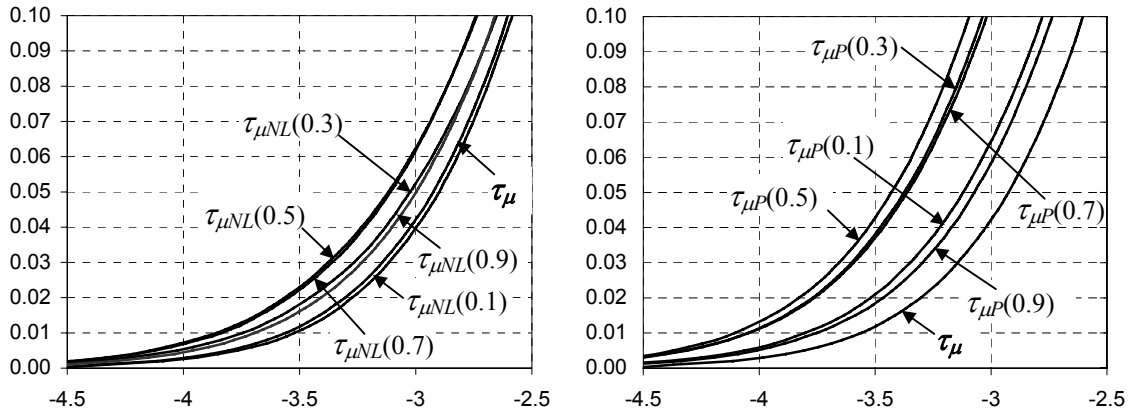
ОТДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК $\tau_{\mu NL}$ И $\tau_{\mu P}$

Стати- стика	Θ	Вероятность							
		1.0%	2.5%	5.0%	10.0%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%
$T=50$									
τ_{μ}		-3.560 (-3.568)	-3.216 (-3.213)	-2.925 (-2.921)	-2.604 (-2.599)	-0.403 (-0.406)	-0.036 (-0.040)	0.284 (0.281)	0.661 (0.659)
$\tau_{\mu NL}$	0.1	-3.523	-3.186	-2.898	-2.584	-0.389	-0.026	0.290	0.664
$\tau_{\mu P}$		-3.803	-3.426	-3.121	-2.779	-0.491	-0.117	0.204	0.579
$\tau_{\mu NL}$	0.2	-3.642	-3.253	-2.934	-2.592	-0.381	-0.017	0.298	0.667
$\tau_{\mu P}$		-3.964	-3.591	-3.284	-2.938	-0.604	-0.234	0.096	0.474
$\tau_{\mu NL}$	0.3	-3.745	-3.354	-3.025	-2.651	-0.379	-0.012	0.305	0.675
$\tau_{\mu P}$		-4.046	-3.679	-3.374	-3.037	-0.695	-0.326	-0.014	0.370
$\tau_{\mu NL}$	0.4	-3.818	-3.418	-3.084	-2.708	-0.379	-0.006	0.311	0.686
$\tau_{\mu P}$		-4.085	-3.727	-3.425	-3.086	-0.752	-0.387	-0.078	0.284
$\tau_{\mu NL}$	0.5	-3.856	-3.459	-3.118	-2.736	-0.378	-0.006	0.314	0.689
$\tau_{\mu P}$		-4.105	-3.732	-3.431	-3.094	-0.766	-0.410	-0.096	0.257
$\tau_{\mu NL}$	0.6	-3.859	-3.458	-3.124	-2.745	-0.389	-0.007	0.316	0.691
$\tau_{\mu P}$		-4.092	-3.715	-3.410	-3.072	-0.742	-0.382	-0.069	0.320
$\tau_{\mu NL}$	0.7	-3.835	-3.445	-3.109	-2.741	-0.393	-0.015	0.317	0.705
$\tau_{\mu P}$		-4.047	-3.670	-3.362	-3.019	-0.676	-0.309	0.009	0.395
$\tau_{\mu NL}$	0.8	-3.782	-3.410	-3.073	-2.713	-0.402	-0.020	0.312	0.701
$\tau_{\mu P}$		-3.937	-3.570	-3.262	-2.909	-0.587	-0.210	0.114	0.494
$\tau_{\mu NL}$	0.9	-3.694	-3.312	-2.998	-2.659	-0.405	-0.028	0.300	0.691
$\tau_{\mu P}$		-3.752	-3.373	-3.071	-2.736	-0.475	-0.104	0.225	0.610
$T=100$									
τ_{μ}		-3.497 (-3.497)	-3.166 (-3.167)	-2.889 (-2.891)	-2.580 (-2.582)	-0.421 (-0.423)	-0.063 (-0.059)	0.253 (0.259)	0.641 (0.632)
$\tau_{\mu NL}$	0.1	-3.473	-3.151	-2.875	-2.571	-0.415	-0.055	0.257	0.642
$\tau_{\mu P}$		-3.743	-3.390	-3.094	-2.763	-0.523	-0.151	0.170	0.552
$\tau_{\mu NL}$	0.2	-3.518	-3.170	-2.880	-2.569	-0.410	-0.052	0.263	0.649
$\tau_{\mu P}$		-3.872	-3.527	-3.246	-2.919	-0.635	-0.261	0.064	0.445
$\tau_{\mu NL}$	0.3	-3.581	-3.212	-2.914	-2.589	-0.411	-0.051	0.265	0.646
$\tau_{\mu P}$		-3.964	-3.620	-3.330	-3.008	-0.730	-0.361	-0.047	0.334
$\tau_{\mu NL}$	0.4	-3.625	-3.244	-2.945	-2.608	-0.410	-0.050	0.269	0.650
$\tau_{\mu P}$		-4.003	-3.670	-3.375	-3.058	-0.789	-0.427	-0.116	0.247
$\tau_{\mu NL}$	0.5	-3.642	-3.282	-2.968	-2.628	-0.411	-0.048	0.271	0.659
$\tau_{\mu P}$		-3.998	-3.666	-3.393	-3.076	-0.802	-0.452	-0.143	0.219
$\tau_{\mu NL}$	0.6	-3.645	-3.281	-2.976	-2.636	-0.416	-0.050	0.272	0.654
$\tau_{\mu P}$		-3.999	-3.655	-3.376	-3.054	-0.782	-0.430	-0.120	0.246
$\tau_{\mu NL}$	0.7	-3.640	-3.269	-2.968	-2.636	-0.422	-0.051	0.271	0.660
$\tau_{\mu P}$		-3.949	-3.605	-3.323	-3.000	-0.724	-0.361	-0.039	0.340
$\tau_{\mu NL}$	0.8	-3.613	-3.250	-2.947	-2.624	-0.422	-0.054	0.271	0.662
$\tau_{\mu P}$		-3.882	-3.523	-3.231	-2.901	-0.623	-0.258	0.066	0.447
$\tau_{\mu NL}$	0.9	-3.559	-3.215	-2.922	-2.605	-0.425	-0.059	0.266	0.668
$\tau_{\mu P}$		-3.711	-3.362	-3.069	-2.746	-0.517	-0.142	0.177	0.554

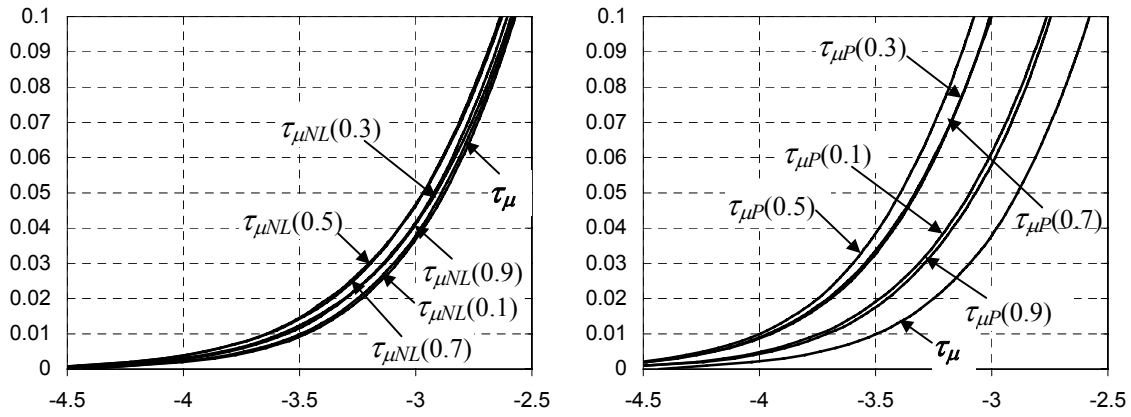
Таблица I (продолжение)

		T=150							
τ_μ		-3.474	-3.157	-2.891	-2.580	-0.429	-0.068	0.253	0.622
		(-3.474)	(-3.151)	(-2.881)	(-2.577)	(-0.429)	(-0.066)	(0.252)	(0.624)
$\tau_{\mu NL}$	0.1	-3.452	-3.146	-2.881	-2.574	-0.425	-0.065	0.256	0.626
$\tau_{\mu P}$		-3.715	-3.376	-3.086	-2.763	-0.533	-0.166	0.162	0.533
$\tau_{\mu NL}$	0.2	-3.465	-3.152	-2.879	-2.574	-0.422	-0.061	0.260	0.626
$\tau_{\mu P}$		-3.854	-3.511	-3.228	-2.905	-0.645	-0.278	0.046	0.417
$\tau_{\mu NL}$	0.3	-3.520	-3.181	-2.900	-2.587	-0.420	-0.059	0.259	0.626
$\tau_{\mu P}$		-3.931	-3.589	-3.311	-3.000	-0.740	-0.378	-0.053	0.321
$\tau_{\mu NL}$	0.4	-3.551	-3.202	-2.919	-2.599	-0.421	-0.058	0.261	0.634
$\tau_{\mu P}$		-3.953	-3.638	-3.365	-3.057	-0.805	-0.444	-0.125	0.239
$\tau_{\mu NL}$	0.5	-3.557	-3.221	-2.933	-2.607	-0.423	-0.059	0.263	0.634
$\tau_{\mu P}$		-3.952	-3.633	-3.368	-3.066	-0.819	-0.465	-0.156	0.211
$\tau_{\mu NL}$	0.6	-3.570	-3.222	-2.938	-2.613	-0.425	-0.059	0.261	0.634
$\tau_{\mu P}$		-3.959	-3.632	-3.353	-3.046	-0.794	-0.438	-0.125	0.239
$\tau_{\mu NL}$	0.7	-3.567	-3.225	-2.937	-2.612	-0.425	-0.063	0.264	0.634
$\tau_{\mu P}$		-3.913	-3.589	-3.315	-3.002	-0.734	-0.366	-0.054	0.321
$\tau_{\mu NL}$	0.8	-3.549	-3.209	-2.927	-2.606	-0.427	-0.062	0.256	0.632
$\tau_{\mu P}$		-3.848	-3.514	-3.228	-2.904	-0.635	-0.265	0.058	0.432
$\tau_{\mu NL}$	0.9	-3.515	-3.181	-2.911	-2.596	-0.429	-0.066	0.256	0.631
$\tau_{\mu P}$		-3.693	-3.355	-3.072	-2.758	-0.524	-0.162	0.155	0.535
		T=200							
τ_μ		-3.462	-3.143	-2.882	-2.583	-0.431	-0.070	0.244	0.610
		(-3.463)	(-3.144)	(-2.876)	(-2.574)	(-0.432)	(-0.069)	(0.249)	(0.620)
$\tau_{\mu NL}$	0.1	-3.452	-3.136	-2.876	-2.578	-0.427	-0.069	0.247	0.611
$\tau_{\mu P}$		-3.699	-3.354	-3.076	-2.764	-0.539	-0.170	0.150	0.520
$\tau_{\mu NL}$	0.2	-3.462	-3.136	-2.874	-2.575	-0.426	-0.065	0.249	0.616
$\tau_{\mu P}$		-3.828	-3.503	-3.226	-2.910	-0.652	-0.281	0.041	0.424
$\tau_{\mu NL}$	0.3	-3.489	-3.154	-2.884	-2.583	-0.426	-0.064	0.251	0.614
$\tau_{\mu P}$		-3.918	-3.589	-3.313	-3.005	-0.748	-0.383	-0.059	0.322
$\tau_{\mu NL}$	0.4	-3.513	-3.175	-2.901	-2.591	-0.425	-0.063	0.253	0.616
$\tau_{\mu P}$		-3.957	-3.633	-3.354	-3.049	-0.800	-0.445	-0.131	0.231
$\tau_{\mu NL}$	0.5	-3.530	-3.188	-2.911	-2.600	-0.428	-0.063	0.252	0.622
$\tau_{\mu P}$		-3.953	-3.634	-3.367	-3.059	-0.824	-0.471	-0.168	0.179
$\tau_{\mu NL}$	0.6	-3.533	-3.192	-2.915	-2.601	-0.429	-0.066	0.250	0.623
$\tau_{\mu P}$		-3.939	-3.623	-3.356	-3.047	-0.806	-0.453	-0.145	0.220
$\tau_{\mu NL}$	0.7	-3.536	-3.191	-2.913	-2.602	-0.432	-0.067	0.251	0.627
$\tau_{\mu P}$		-3.912	-3.588	-3.307	-2.999	-0.743	-0.385	-0.062	0.324
$\tau_{\mu NL}$	0.8	-3.517	-3.180	-2.908	-2.599	-0.432	-0.064	0.249	0.627
$\tau_{\mu P}$		-3.836	-3.497	-3.216	-2.904	-0.640	-0.274	0.053	0.429
$\tau_{\mu NL}$	0.9	-3.490	-3.164	-2.899	-2.593	-0.433	-0.067	0.248	0.618
$\tau_{\mu P}$		-3.689	-3.355	-3.075	-2.759	-0.536	-0.166	0.155	0.542

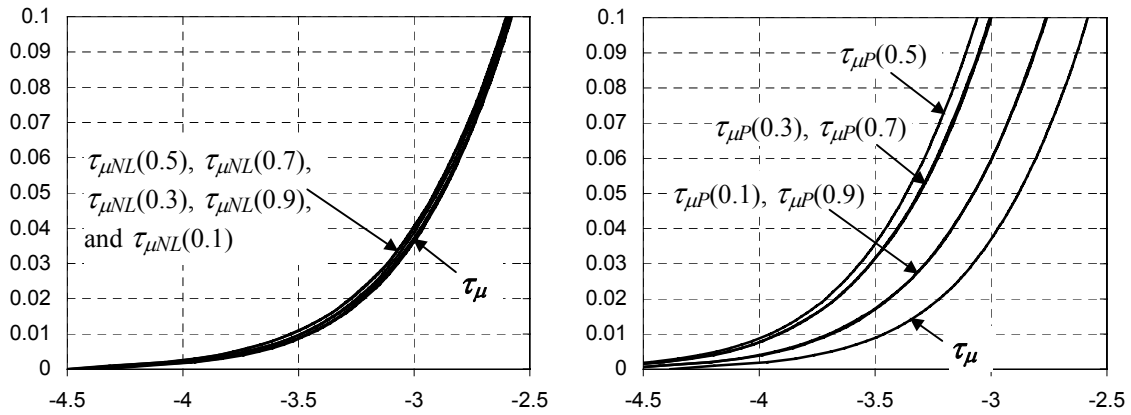
Примечание: В скобках указаны табличные значения τ_μ из MacKinnon (1996).



$T = 50$



$T = 100$



$T = 200$

Рис 1. – Левые хвосты функций распределения $\tau_{\mu NL}(\Theta)$ and $\tau_{\mu P}(\Theta)$.

Асимптотическое распределение $\tau_{\mu P}$, как видно из формулы (8) в Ретгон (1990), зависит от Θ . Интерес представляют три его свойства: (а) распределение симметрично относительно точки $\Theta = 0.5$; (б) при стремлении Θ к 0 либо 1, распределение $\tau_{\mu P}(\Theta)$ стремится к распределению Дикки-Фуллера статистики τ_{μ} . Поэтому (в) семейство распределений $\tau_{\mu P}(\Theta)$ ограничено распределением $\tau_{\mu P}(0.5)$ слева и дикки-фуллеровским распределением τ_{μ} справа. Как свидетельствуют численные эксперименты, конечно-выборочные распределения также обладают свойствами (б) и (в). Но свойство (а), симметрия, не имеет места. Распределение для $\min(\Theta, 1 - \Theta)$ сдвинуто влево, и чем дальше Θ от 0.5, тем больше расстояние между графиками распределений $\tau_{\mu P}(\Theta)$ и $\tau_{\mu P}(1 - \Theta)$. Тем не менее, если выборка не очень мала (скажем, $T \geq 100$), это различие невелико и им можно пренебречь; при $T = 200$ значимости тестов для Θ и $1 - \Theta$ практически совпадают. Различие между крайними критическими значениями, $\tau_{\mu P}(0.5)$ и τ_{μ} , почти постоянны по T (при $T \in [50, 200]$); для значимости теста 10% оно составляет приблизительно 0.49.

В Ретгон (1990), табл. 4 даны конечно-выборочные критические значения $\tau_{\mu P}$ для $T = 50, 100, 200$. Величины в табл. I хорошо согласуются с ними. Поскольку в указанной работе использовалось 5000 повторений, данные из табл. I можно рассматривать как более точные оценки этой статистики Перрона, так как они получены при 200000 повторений. Кроме того, таблица содержит некоторую новую информацию о $\tau_{\mu P}$: свидетельство «расщепления» конечно-выборочных распределений для Θ и $1 - \Theta$.

Поведение распределения $\tau_{\mu NL}$, хотя и имеет некоторые сходные черты, существенно иное (при изучении рассматриваемых распределений было проведено большое число экспериментов для различных Θ и T сверх представленных здесь; ряд выводов базируется не только на представленных результатах, но и на указанных дополнительных, которые здесь не приводятся). Распределение для конечных выборок также зависит от Θ ; но не обладает даже приближительной симметрией относительно $\Theta = 0.5$ или другой точки. Семейство распределений $\tau_{\mu NL}(\Theta)$ лежит между распределениями $\tau_{\mu NL}(\Theta_L)$ и $\tau_{\mu NL}(\Theta_R)$, ограничивающими его соответственно

слева и справа. Однако это отличается от свойства (в). Величина Θ_L равна примерно от 0.5 до 0.6. Более точную величину указать невозможно, так как, например, распределения для $\Theta = 0.5$ и $\Theta = 0.6$ очень близки и их вряд ли можно отличить друг от друга. Величина Θ_R составляет грубо от 0.1 до 0.15, и соответствующие распределения проходят немного правее конечно-выборочного распределения Дикки-Фуллера. В то же время свойство (б) по-прежнему имеет место. Таким образом, распределение $\tau_{\mu NL}(\Theta)$ ведёт себя несколько странно, когда Θ изменяется от Θ_L до 0: оно смещается вправо до распределения $\tau_{\mu NL}(\Theta_R)$, а затем, при дальнейшем уменьшении Θ от Θ_R до 0, оно сдвигается назад к распределению Дикки-Фуллера.

На самом деле свойство (б) не является асимптотическим. При $\Theta = 1$ $B_\Theta \equiv 0$ для всех $t \leq T$. Поэтому и (2), и (6) вырождаются в тестовое уравнение Дикки-Фуллера с константой, $\Delta y_t = \alpha + \lambda y_{t-1} + \varepsilon_t$. Поэтому неудивительно, что распределения $\tau_{\mu P}$ и $\tau_{\mu NL}$ стремятся к распределению τ_μ при $\Theta \rightarrow 1$. В случае $\Theta = 0$ есть одно неудобство – в том, что $B_\Theta = 1$ при $1 \leq t \leq T$, но $B_\Theta = 0$ при $t = 0$. По большей части случай $t = 1$ можно стандартизировать, включив «мешающий член» уравнения при $t = 1$ в начальное условие. Но для простоты, немного пожертвовав строгостью, B_Θ принимается тождественно равным 1 при $\Theta = 0$ для всех $0 \leq t \leq T$. Тогда (6) превращается в $\Delta y_t = (\alpha + \gamma - \delta) + \lambda y_{t-1} + \varepsilon_t$, т.е. опять в уравнение Дикки-Фуллера с константой; аналогично, (2) переходит в $\Delta y_t = -\lambda \mu_1 + \lambda y_{t-1} + \varepsilon_t$. Таким образом, следует ожидать, что при $\Theta \rightarrow 0$ распределения $\tau_{\mu P}$ и $\tau_{\mu NL}$, как и в случае $\Theta \rightarrow 1$, также стремятся к распределению τ_μ .

Нужно отметить, что критические значения нелинейного теста при данной значимости меньше по абсолютной величине, чем критические значения Перрона. Поэтому можно ожидать, что нелинейный тест обладает большей мощностью. Ещё одной особенностью является гораздо меньшее различие между $\tau_{\mu NL}$ при смежных значениях Θ , чем у $\tau_{\mu P}$. Отсюда следует, что использование критических значений для имеющейся в таблице статистики величины Θ вместо фактической (скажем, для $\Theta = 0.3$ вместо 0.35) приведёт к гораздо меньшим искажениям p -значений теста, чем в той же ситуации при использовании линейного теста.

Но наиболее примечательная черта распределения $\tau_{\mu NL}$ – его поведение при

увеличении объёма выборки. Различие между крайними критическими значениями, $\tau_{\mu NL}(\Theta_L)$ и $\tau_{\mu NL}(\Theta_R)$, быстро сокращается: для значимости теста 10% оно равно 0.16 при $T = 50$, 0.07 при $T = 100$, 0.04 при $T = 150$, и 0.03 при $T = 200$. Более того, и $\tau_{\mu NL}(\Theta_L)$, и $\tau_{\mu NL}(\Theta_R)$ с ростом T стремятся к τ_{μ} . Следовательно, если выборка не очень мала, для тестирования модели (2) на единичный корень можно воспользоваться критическими значениями Дикки-Фуллера. В таком случае при, например, $T = 100$, p -значение будет занижено в худшем случае примерно на 1.5 процентных пункта.

ТАБЛИЦА II.

ОТДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ КВАЗИАСИМПТОТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ $\tau_{\mu NL}$ И $\tau_{\mu P}$

Статистика	Θ	Вероятность							
		1.0%	2.5%	5.0%	10.0%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%
τ_{μ}		-3.434	-3.131	-2.871	-2.572	-0.441	-0.079	0.236	0.598
		(-3.430)	(-3.122)	(-2.861)	(-2.567)	(-0.440)	(-0.078)	(0.238)	(0.607)
$\tau_{\mu NL}$	0.1	-3.435	-3.132	-2.872	-2.572	-0.441	-0.079	0.237	0.599
$\tau_{\mu P}$		-3.670	-3.348	-3.075	-2.766	-0.548	-0.184	0.139	0.517
$\tau_{\mu NL}$	0.2	-3.438	-3.132	-2.871	-2.573	-0.441	-0.079	0.237	0.598
$\tau_{\mu P}$		-3.789	-3.474	-3.209	-2.898	-0.662	-0.296	0.029	0.401
$\tau_{\mu NL}$	0.3	-3.434	-3.132	-2.870	-2.572	-0.441	-0.078	0.237	0.598
$\tau_{\mu P}$		-3.866	-3.555	-3.296	-2.991	-0.758	-0.395	-0.077	0.286
$\tau_{\mu NL}$	0.4	-3.437	-3.133	-2.873	-2.572	-0.441	-0.079	0.236	0.598
$\tau_{\mu P}$		-3.895	-3.595	-3.332	-3.037	-0.828	-0.478	-0.168	0.197
$\tau_{\mu NL}$	0.5	-3.436	-3.132	-2.871	-2.573	-0.441	-0.079	0.236	0.598
$\tau_{\mu P}$		-3.910	-3.607	-3.345	-3.051	-0.842	-0.501	-0.191	0.173
$\tau_{\mu NL}$	0.6	-3.436	-3.133	-2.871	-2.572	-0.441	-0.079	0.235	0.596
$\tau_{\mu P}$		-3.895	-3.590	-3.331	-3.032	-0.827	-0.471	-0.163	0.199
$\tau_{\mu NL}$	0.7	-3.434	-3.133	-2.871	-2.573	-0.441	-0.078	0.237	0.596
$\tau_{\mu P}$		-3.867	-3.553	-3.289	-2.991	-0.760	-0.393	-0.077	0.297
$\tau_{\mu NL}$	0.8	-3.435	-3.131	-2.873	-2.572	-0.441	-0.080	0.236	0.598
$\tau_{\mu P}$		-3.794	-3.478	-3.209	-2.898	-0.662	-0.286	0.036	0.410
$\tau_{\mu NL}$	0.9	-3.436	-3.132	-2.872	-2.572	-0.441	-0.078	0.237	0.598
$\tau_{\mu P}$		-3.662	-3.345	-3.074	-2.763	-0.548	-0.181	0.140	0.510

Примечание: В скобках указаны табличные асимптотические значения τ_{μ} из MacKinnon (1996); они отличаются от конечно-выборочных величин для $T=10000$ менее чем на 0.001.

Квазиасимптотические критические значения $\tau_{\mu NL}$ и $\tau_{\mu P}$ даны в табл. II (что касается $\tau_{\mu P}$, их значения близки к асимптотическим, приведённым в Perron (1990), табл. 4; распределения целиком (для некоторых Θ) показаны на рис. 2. Различие между $\tau_{\mu P}(0.5)$ и τ_{μ} уменьшается незначительно: до 0.48 по сравнению с 0.49 при $T = 50$

(при значимости теста 10%). Что касается $\tau_{\mu NL}(\Theta_L)$ и $\tau_{\mu NL}(\Theta_R)$, различие между ними вообще исчезает, обе границы совпадают с τ_{μ} . Таким образом, асимптотическое распределение $\tau_{\mu NL}$ является дикки-фуллеровским распределением τ_{μ} , не завися от Θ .

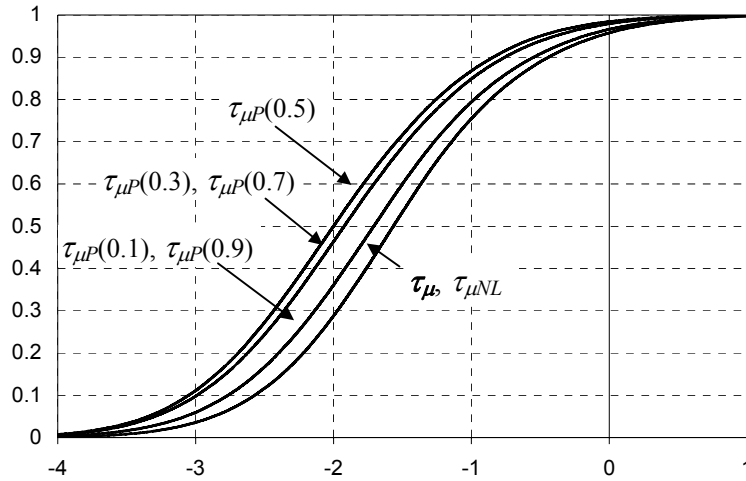


Рис. 2. – Квазиасимптотические функции распределения $\tau_{\mu NL}$ и $\tau_{\mu P}(\Theta)$.

3.2 Статистики для регрессий без константы

Результаты расчётов методом Монте-Карло, полученные для статистик теста на единичный корень, связанных с регрессиями (3) и (7), для конечных выборок приведены в табл. III. На рис. 3 показаны 10-процентные хвосты некоторых распределений.

На этот раз распределение статистики Перрона на обладает симметрией относительно какого-либо Θ даже в асимптотическом случае; при данной вероятности τ_{0P} монотонно изменяется при изменении Θ . Семейство распределений $\tau_{0P}(\Theta)$ ограничено распределением $\tau_{0P}(0)$ слева и распределением $\tau_{0P}(1)$ справа. Как легко видеть, это дикки-фуллеровские распределения τ_{μ} и τ_0 соответственно. Действительно, при $\Theta = 1$ (7) вырождается в уравнение Дикки-Фуллера без константы, $\Delta y_t = \lambda y_{t-1} + \varepsilon_t$. При $\Theta = 0$ (7) становится уравнением Дикки-Фуллера с константой, $\Delta y_t = (\gamma - \delta) + \lambda y_{t-1} + \varepsilon_t$. Таким образом, различие между крайними (по Θ) критическими значениями статистики τ_{0P} есть различие между τ_{μ} и τ_0 . Оно примерно вдвое больше, чем для $\tau_{\mu P}$. Например, при значимости теста 10%, различие составляет 0.986 при $T = 50$ и 0.957 при $T = 200$ (асимптотическое значение равно 0.950).

ТАБЛИЦА III.

ОТДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТАТИСТИК τ_{0NL} И τ_{0P}

Статистика	Θ	Вероятность							
		1.0%	2.5%	5.0%	10.0%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%
$T=50$									
τ_0		-2.619 (-2.612)	-2.259 (-2.249)	-1.956 (-1.948)	-1.616 (-1.613)	0.900 (0.906)	1.309 (1.309)	1.665 (1.660)	2.086 (2.073)
τ_{0NL}	0.1	-3.194	-2.778	-2.402	-1.946	0.918	1.320	1.671	2.073
τ_{0P}		-3.540	-3.180	-2.885	-2.562	-0.364	-0.002	0.314	0.688
τ_{0NL}	0.2	-3.172	-2.744	-2.361	-1.901	0.916	1.328	1.667	2.087
τ_{0P}		-3.500	-3.145	-2.848	-2.514	-0.171	0.193	0.514	0.900
τ_{0NL}	0.3	-3.149	-2.716	-2.328	-1.866	0.919	1.326	1.673	2.091
τ_{0P}		-3.459	-3.093	-2.797	-2.457	0.052	0.449	0.794	1.210
τ_{0NL}	0.4	-3.099	-2.670	-2.279	-1.819	0.920	1.325	1.678	2.097
τ_{0P}		-3.413	-3.055	-2.746	-2.392	0.267	0.683	1.044	1.470
τ_{0NL}	0.5	-3.060	-2.616	-2.228	-1.776	0.918	1.330	1.687	2.099
τ_{0P}		-3.348	-2.983	-2.663	-2.313	0.438	0.865	1.224	1.663
τ_{0NL}	0.6	-2.999	-2.550	-2.170	-1.739	0.922	1.335	1.694	2.116
τ_{0P}		-3.277	-2.895	-2.573	-2.209	0.592	1.013	1.369	1.794
τ_{0NL}	0.7	-2.917	-2.478	-2.109	-1.703	0.921	1.336	1.696	2.129
τ_{0P}		-3.165	-2.785	-2.448	-2.077	0.709	1.122	1.488	1.903
τ_{0NL}	0.8	-2.831	-2.402	-2.052	-1.672	0.917	1.331	1.696	2.117
τ_{0P}		-3.034	-2.623	-2.295	-1.919	0.793	1.207	1.565	1.988
τ_{0NL}	0.9	-2.703	-2.317	-2.001	-1.644	0.913	1.323	1.686	2.116
τ_{0P}		-2.789	-2.413	-2.096	-1.732	0.866	1.276	1.636	2.060
$T=100$									
τ_0		-2.582 (-2.588)	-2.240 (-2.238)	-1.948 (-1.944)	-1.613 (-1.615)	0.893 (0.897)	1.297 (1.296)	1.638 (1.641)	2.038 (2.043)
τ_{0NL}	0.1	-2.985	-2.546	-2.182	-1.744	0.900	1.303	1.644	2.041
τ_{0P}		-3.466	-3.133	-2.854	-2.544	-0.372	-0.017	0.297	0.669
τ_{0NL}	0.2	-2.947	-2.519	-2.150	-1.725	0.902	1.306	1.644	2.042
τ_{0P}		-3.430	-3.097	-2.814	-2.497	-0.190	0.175	0.513	0.896
τ_{0NL}	0.3	-2.918	-2.486	-2.118	-1.704	0.903	1.305	1.648	2.046
τ_{0P}		-3.404	-3.056	-2.771	-2.445	0.038	0.435	0.782	1.186
τ_{0NL}	0.4	-2.880	-2.455	-2.089	-1.687	0.904	1.306	1.651	2.053
τ_{0P}		-3.359	-3.012	-2.722	-2.387	0.245	0.656	1.014	1.424
τ_{0NL}	0.5	-2.829	-2.409	-2.058	-1.671	0.901	1.308	1.653	2.052
τ_{0P}		-3.286	-2.952	-2.652	-2.304	0.422	0.842	1.207	1.635
τ_{0NL}	0.6	-2.790	-2.372	-2.039	-1.662	0.904	1.306	1.654	2.062
τ_{0P}		-3.225	-2.869	-2.559	-2.207	0.568	0.992	1.353	1.768
τ_{0NL}	0.7	-2.738	-2.329	-2.007	-1.648	0.901	1.309	1.658	2.065
τ_{0P}		-3.133	-2.764	-2.446	-2.081	0.683	1.099	1.465	1.871
τ_{0NL}	0.8	-2.676	-2.299	-1.988	-1.637	0.899	1.309	1.652	2.056
τ_{0P}		-2.988	-2.613	-2.297	-1.935	0.779	1.186	1.540	1.949
τ_{0NL}	0.9	-2.629	-2.272	-1.969	-1.623	0.898	1.305	1.660	2.058
τ_{0P}		-2.807	-2.426	-2.112	-1.757	0.847	1.245	1.590	1.996

Таблица III (продолжение)

T=150									
τ_0		-2.570	-2.229	-1.938	-1.614	0.904	1.300	1.648	2.041
		(-2.581)	(-2.235)	(-1.943)	(-1.615)	(0.894)	(1.292)	(1.635)	(2.034)
τ_{0NL}	0.1	-2.861	-2.439	-2.079	-1.685	0.909	1.309	1.653	2.040
τ_{0P}		-3.430	-3.107	-2.838	-2.534	-0.373	-0.015	0.296	0.655
τ_{0NL}	0.2	-2.823	-2.412	-2.056	-1.672	0.909	1.306	1.651	2.037
τ_{0P}		-3.407	-3.080	-2.801	-2.487	-0.188	0.177	0.496	0.874
τ_{0NL}	0.3	-2.794	-2.384	-2.039	-1.667	0.909	1.302	1.648	2.048
τ_{0P}		-3.362	-3.038	-2.759	-2.441	0.033	0.424	0.773	1.183
τ_{0NL}	0.4	-2.764	-2.350	-2.014	-1.655	0.907	1.306	1.653	2.049
τ_{0P}		-3.331	-2.994	-2.705	-2.380	0.236	0.651	1.004	1.430
τ_{0NL}	0.5	-2.737	-2.338	-2.009	-1.648	0.907	1.309	1.654	2.048
τ_{0P}		-3.289	-2.945	-2.645	-2.304	0.415	0.837	1.206	1.621
τ_{0NL}	0.6	-2.698	-2.312	-1.989	-1.642	0.908	1.306	1.656	2.055
τ_{0P}		-3.199	-2.855	-2.558	-2.204	0.558	0.980	1.341	1.752
τ_{0NL}	0.7	-2.666	-2.289	-1.973	-1.634	0.910	1.311	1.656	2.060
τ_{0P}		-3.116	-2.751	-2.442	-2.082	0.677	1.099	1.457	1.877
τ_{0NL}	0.8	-2.627	-2.265	-1.963	-1.630	0.908	1.307	1.660	2.058
τ_{0P}		-2.977	-2.612	-2.297	-1.936	0.767	1.176	1.530	1.927
τ_{0NL}	0.9	-2.598	-2.243	-1.950	-1.621	0.907	1.308	1.651	2.048
τ_{0P}		-2.801	-2.434	-2.118	-1.767	0.848	1.255	1.598	1.990
T=200									
τ_0		-2.572	-2.226	-1.939	-1.612	0.899	1.295	1.641	2.037
		(-2.577)	(-2.233)	(-1.942)	(-1.616)	(0.892)	(1.290)	(1.632)	(2.029)
τ_{0NL}	0.1	-2.787	-2.377	-2.033	-1.663	0.904	1.297	1.642	2.035
τ_{0P}		-3.440	-3.112	-2.839	-2.537	-0.377	-0.015	0.293	0.663
τ_{0NL}	0.2	-2.765	-2.347	-2.010	-1.657	0.904	1.300	1.638	2.040
τ_{0P}		-3.396	-3.072	-2.801	-2.488	-0.189	0.175	0.500	0.881
τ_{0NL}	0.3	-2.733	-2.336	-2.002	-1.648	0.904	1.300	1.642	2.038
τ_{0P}		-3.367	-3.033	-2.760	-2.440	0.033	0.431	0.770	1.172
τ_{0NL}	0.4	-2.713	-2.317	-1.994	-1.643	0.904	1.300	1.644	2.040
τ_{0P}		-3.325	-2.993	-2.708	-2.379	0.239	0.652	1.014	1.416
τ_{0NL}	0.5	-2.681	-2.299	-1.984	-1.640	0.905	1.301	1.646	2.041
τ_{0P}		-3.271	-2.924	-2.641	-2.303	0.411	0.827	1.192	1.611
τ_{0NL}	0.6	-2.657	-2.285	-1.977	-1.636	0.906	1.299	1.651	2.045
τ_{0P}		-3.201	-2.856	-2.559	-2.209	0.553	0.971	1.330	1.741
τ_{0NL}	0.7	-2.638	-2.266	-1.962	-1.627	0.904	1.301	1.646	2.041
τ_{0P}		-3.116	-2.758	-2.451	-2.086	0.671	1.081	1.430	1.839
τ_{0NL}	0.8	-2.621	-2.254	-1.954	-1.622	0.901	1.302	1.649	2.041
τ_{0P}		-2.996	-2.625	-2.304	-1.941	0.759	1.174	1.528	1.926
τ_{0NL}	0.9	-2.593	-2.237	-1.947	-1.620	0.901	1.296	1.642	2.048
τ_{0P}		-2.800	-2.436	-2.120	-1.775	0.835	1.238	1.595	2.002

Примечание: В скобках указаны табличные значения τ_0 из MacKinnon (1996).

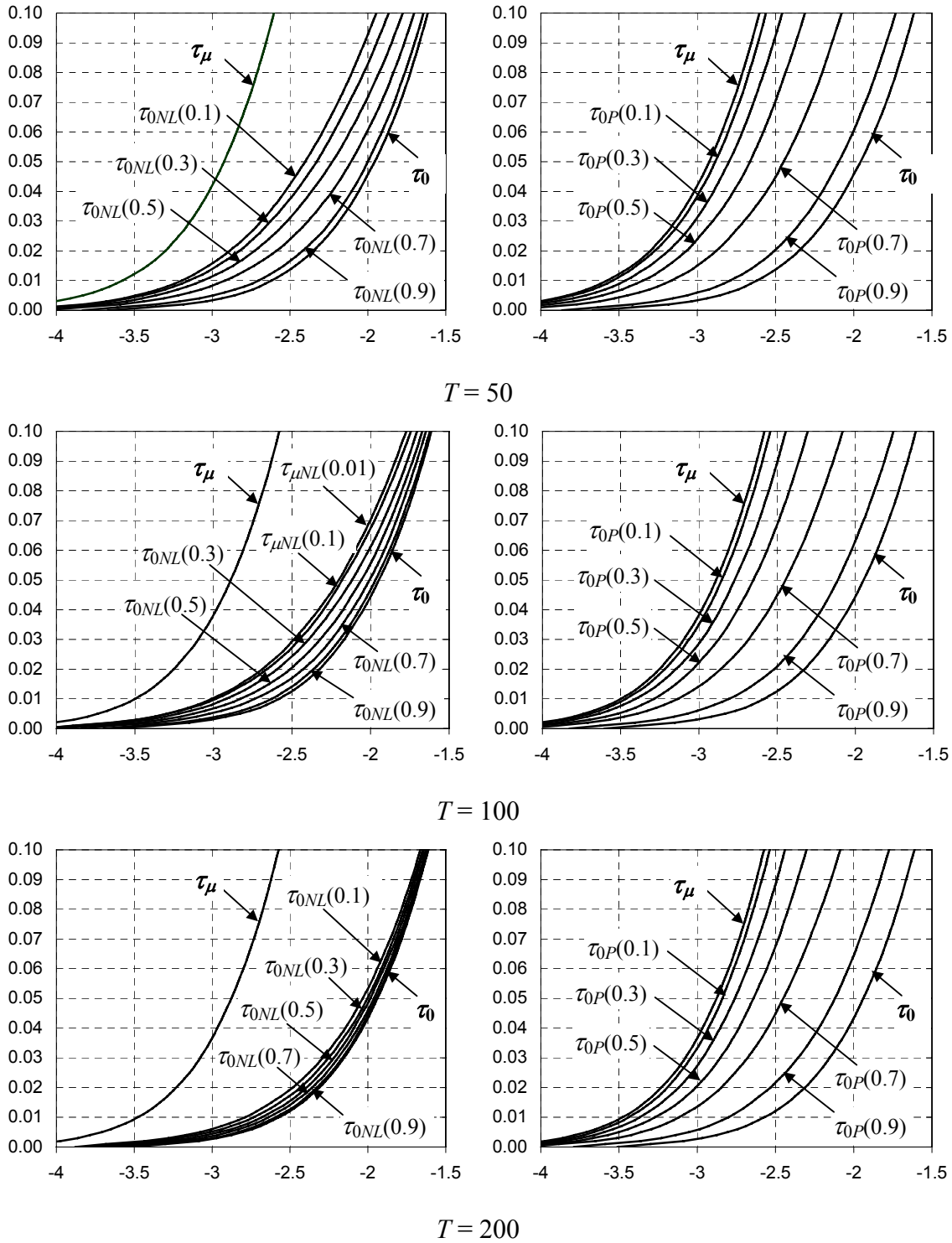


Рис. 3. – Левые хвосты функций распределения $\tau_{0NL}(\Theta)$ и $\tau_{0P}(\Theta)$.

Поведение распределения статистики нелинейного теста сходно в том, что τ_{0NL} монотонно изменяется по Θ (при данной значимости теста) и что семейство распределений $\tau_{0NL}(\Theta)$ ограничено справа распределением $\tau_{0NL}(1) = \tau_0$.

Примечательная особенность состоит в том, что левая граница не является дикки-фуллеровским распределением τ_μ , хотя, на первый взгляд, должна быть им, так как при (3) превращается в $\Delta y_t = -\lambda\gamma + \lambda y_{t-1} + \varepsilon_t$ при $\Theta = 0$ (и, таким образом, $\tau_{0NL}(0) = \tau_\mu$). Но как видно из рис. 3, распределение $\tau_{0NL}(0.1)$ для каждого объёма выборки гораздо ближе к распределению τ_0 , чем к распределениям τ_μ . При дальнейшем уменьшении Θ картина не меняется – распределения $\tau_{0NL}(1/T)$ довольно близки к распределениям $\tau_{0NL}(0.1)$. В качестве примера на рис. 3 показано распределение $\tau_{0NL}(0.01)$ для $T = 100$, не включённое в таблицу. По-видимому, распределение $\tau_{0NL}(\Theta)$ как функция Θ имеет разрыв при $\Theta = 0$. Таким образом, левой границей семейства распределений $\tau_{0NL}(\Theta)$ является некий предел распределения $\tau_{0NL}(\Theta)$ при $\Theta \rightarrow 0$, критические значения которого для данной значимости теста гораздо меньше по абсолютной величине, чем τ_μ . В результате различие между крайними критическими значениями нелинейного теста, для $\Theta = 1/T$ и $\Theta = 1$, гораздо меньше, чем в случае τ_{0P} .

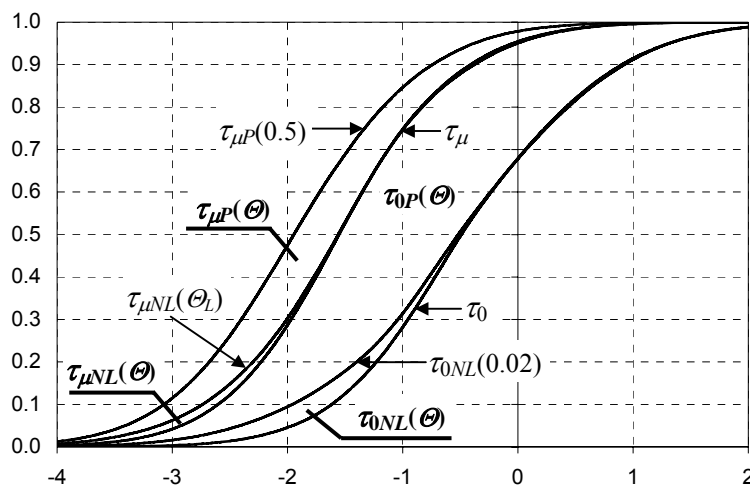


Рис. 4. – Области функций распределения $\tau_{0NL}(\Theta)$ и $\tau_{0P}(\Theta)$, $\tau_{\mu NL}(\Theta)$ и $\tau_{\mu P}(\Theta)$; $T = 50$.

Чтобы дать общее представление о различиях между семействами распределений статистики Перрона и нелинейного теста, на рис. 4 показаны области этих семейств для $T = 50$ для случаев регрессий с константой и без неё. Распределения $\tau_{0P}(\Theta)$ заполняют всю область между линиями τ_0 и τ_{μ} , тогда как распределения $\tau_{0NL}(\Theta)$ заполняют только небольшую долю этой области в её правой части; при p -значения выше примерно 0.5 распределения $\tau_{0NL}(\Theta)$ для всех Θ практически совпадают с дикки-фуллеровским распределением τ_0 ; для $\tau_{\mu NL}(\Theta)$ и $\tau_{\mu P}(\Theta)$ картина качественно подобна.

ТАБЛИЦА IV.

ОТДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ КВАЗИАСИМПТОТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ τ_{0NL} И τ_{0P}

Статистика	Θ	Вероятность							
		1.0%	2.5%	5.0%	10.0%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%
τ_0		-2.572 (-2.565)	-2.230 (-2.227)	-1.950 (-1.941)	-1.623 (-1.617)	0.889 (0.888)	1.279 (1.284)	1.622 (1.624)	2.009 (2.015)
τ_{0NL}	0.1	-2.578	-2.230	-1.951	-1.624	0.889	1.280	1.621	2.009
τ_{0P}		-3.388	-3.094	-2.826	-2.529	-0.389	-0.036	0.264	0.641
τ_{0NL}	0.2	-2.578	-2.232	-1.952	-1.625	0.890	1.279	1.621	2.009
τ_{0P}		-3.370	-3.063	-2.791	-2.488	-0.211	0.157	0.476	0.843
τ_{0NL}	0.3	-2.573	-2.232	-1.948	-1.624	0.889	1.279	1.622	2.008
τ_{0P}		-3.342	-3.024	-2.755	-2.440	0.010	0.404	0.752	1.163
τ_{0NL}	0.4	-2.573	-2.232	-1.950	-1.624	0.889	1.279	1.621	2.008
τ_{0P}		-3.307	-2.980	-2.704	-2.384	0.215	0.624	0.980	1.391
τ_{0NL}	0.5	-2.575	-2.230	-1.949	-1.624	0.889	1.278	1.622	2.008
τ_{0P}		-3.253	-2.928	-2.641	-2.307	0.393	0.819	1.177	1.596
τ_{0NL}	0.6	-2.574	-2.232	-1.950	-1.624	0.889	1.279	1.622	2.009
τ_{0P}		-3.188	-2.860	-2.560	-2.212	0.540	0.955	1.321	1.735
τ_{0NL}	0.7	-2.574	-2.230	-1.950	-1.623	0.888	1.280	1.622	2.009
τ_{0P}		-3.117	-2.758	-2.452	-2.100	0.659	1.072	1.428	1.832
τ_{0NL}	0.8	-2.575	-2.230	-1.950	-1.624	0.889	1.278	1.620	2.011
τ_{0P}		-2.981	-2.623	-2.315	-1.960	0.756	1.162	1.505	1.892
τ_{0NL}	0.9	-2.572	-2.230	-1.949	-1.624	0.889	1.279	1.622	2.010
τ_{0P}		-2.813	-2.452	-2.148	-1.798	0.828	1.228	1.572	1.963

Примечание: В скобках указаны табличные асимптотические значения τ_0 из MacKinnon (1996); они отличаются от конечно-выборочных величин для $T=10000$ менее чем на 0.001.

Различие между крайними критическими значениями, $\tau_{0NL}(1/T)$ и $\tau_{0NL}(1)$, быстро уменьшается при росте объёма выборки. При значимости теста 10%, оно рав-

но 0.35 при $T = 50$, 0.15 при $T = 100$, 0.09 при $T = 150$, и 0.06 при $T = 200$. Так как правой границей распределения $\tau_{0NL}(\Theta)$ всегда является распределение τ_0 , это означает, что $\tau_{0NL}(1/T)$ стремится к τ_0 с ростом T (как и, следовательно, $\tau_{0NL}(\Theta)$ для всех Θ). Тогда левая и правая границы семейства распределений $\tau_{0NL}(\Theta)$ должны в итоге соединиться. Квазиасимптотические результаты, приведённые в табл. IV и на рис. 5, показывают, что дело обстоит именно таким образом. Итак, асимптотическое распределение τ_{0NL} – независимо от Θ – является распределением Дикки-Фуллера статистики τ_0 .

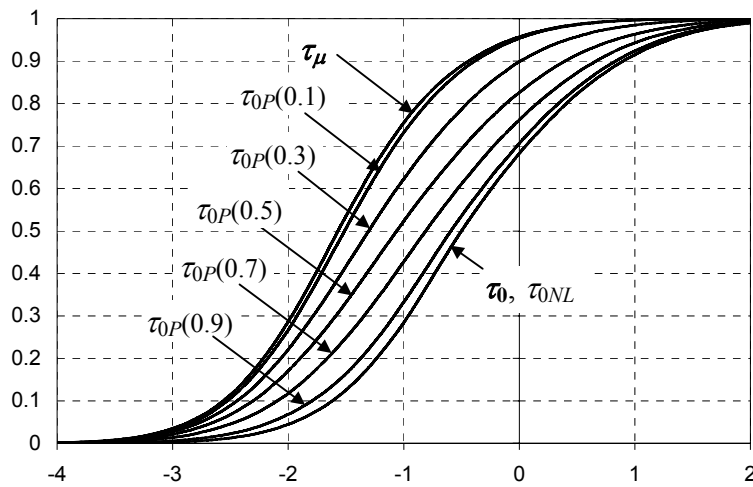


Рис. 5. – Квазиасимптотические функции распределения τ_{0NL} и $\tau_{0P}(\Theta)$.

Хорошо известным неприятным свойством τ -статистик теста на единичный корень для случая отсутствия константы является их зависимость от начального условия в конечных выборках. Первое упоминание об этом содержится, по-видимому, ещё в Dickey and Fuller (1979). В работе Evans and Savin (1981) подробно изучался эффект начального условия, при этом было обнаружено, что на распределение $\hat{\lambda} + 1$ влияет величина y_0/σ , этот результат был объяснён теоретически в Phillips (1987). В недавние годы роль начального условия для тестирования на единичный корень, включая τ -тесты Дикки-Фуллера, анализировалась в Müller and Elliott (2003). Исходя из этих исследований, следует ожидать, что статистики τ_{0NL} и τ_{0P} также подвержены воздействию начального условия.

Эксперименты с помощью метода Монте-Карло подтверждают это. Рис. 6 показывает, как распределения τ_{0NL} и τ_{0P} зависят от начального условия в случаях фиксированной и случайной величины y_0 . Поскольку $\{\varepsilon_t\}$ получены из распределения $N(0,1)$, можно считать, что y_0 и ζ измеряются в единицах σ , стандартного отклонения случайных возмущений.

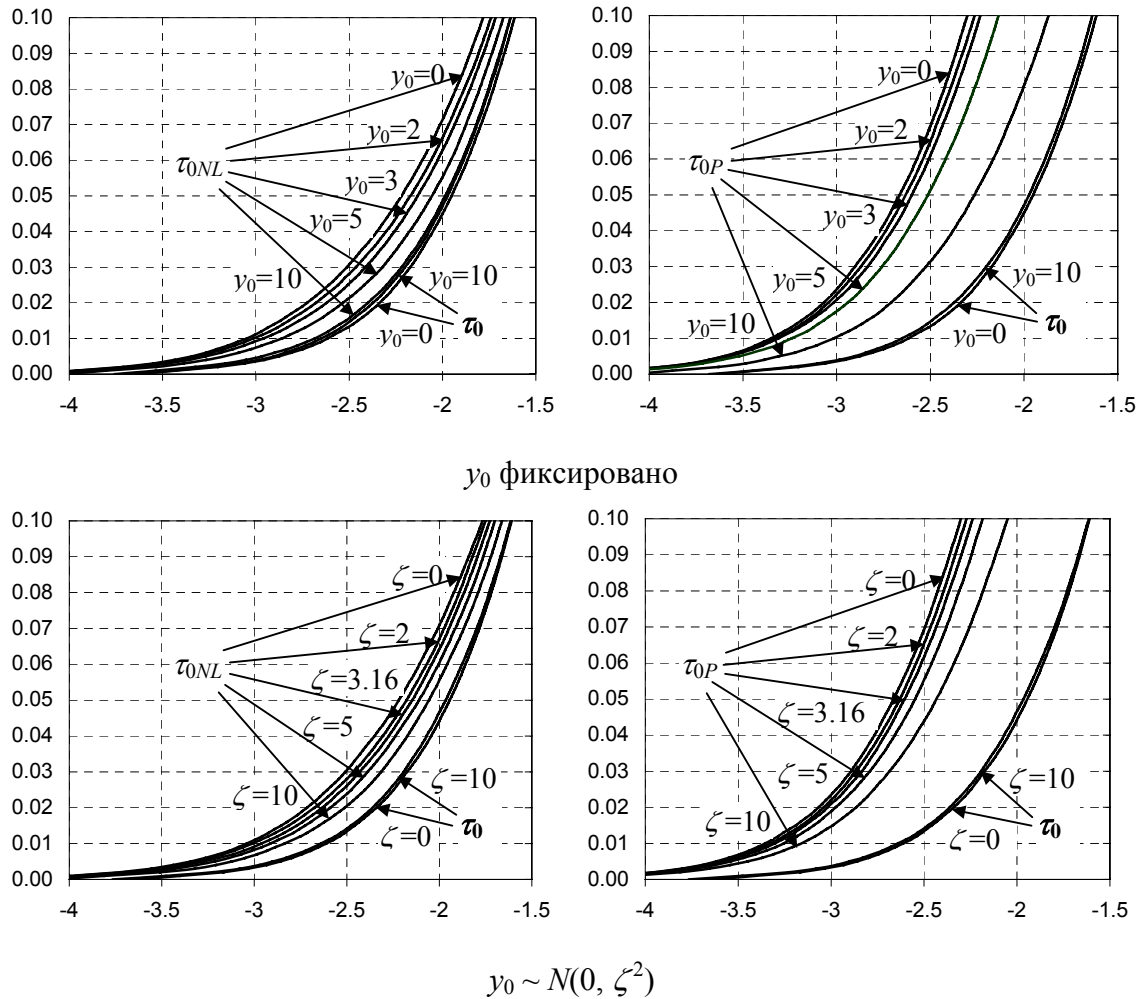


РИС. 6. – Влияние начального условия на распределения τ_{0NL} и τ_{0P} ; $T = 50$; $\Theta = 0.5$

При малых значимостях, 20% и менее, распределение Дикки-Фуллера для τ_0 слабо зависит от начального условия. Даже при $y_0 = 10$ или равном стандартном отклонении случайного значения y_0 с нулевым средним, изменения дикки-

фуллеровских критических значений настолько невелики, что ими можно пренебречь. В отличие от этого, и τ_{0NL} , и τ_{0P} довольно чувствительны к начальному условию. Искажения значимости – ниже номинальных величин – симметричны относительно $y_0 = 0$ и становятся заметны (при объёме выборки 50 наблюдений), начиная со значений $|y_0|$, равных трём стандартным отклонениям возмущений. При $y_0 = 10$ распределение τ_{0NL} становится очень близким к распределению Дикки-Фуллера для τ_0 (на самом деле, если проследить его поведение при больших значимостях, оно близко к распределению τ_0 для $y_0 = 10$). Как видно из рис. 6, влияние стандартного отклонения случайной величины y_0 качественно подобно, хотя количественно несколько слабее. Таким образом, когда начальное условие является случайной величиной и имеет ненулевое среднее, значимость тестов будет испытывать совместное воздействие средней величины начального воздействия и его дисперсии.

3.3 Обратные скачки

В приложениях иногда удобно описывать процесс с помощью обратного скачка, т.е. $B'_{\theta} = 1$ при $t \leq \theta$ и 0 в противном случае, или $B'_{\theta} = 1 - B_{\theta}$. Обозначим соответствующие статистики как $\tau'_{\mu NL}$, τ'_{0NL} , $\tau'_{\mu P}$ и τ'_{0P} .

Интуитивно ясно, что когда мы имеем дело с переключением между двумя произвольными уровнями μ_0 и μ_1 , не имеет значения, какой из них принят за базовый, и поэтому тесты на единичный корень должны быть инварианты к такому выбору. Действительно, заменив B_{θ} на $1 - B_{\theta}$ в (2), имеем $\Delta y_t = (\alpha - \lambda\gamma) + \lambda y_{t-1} - \gamma B_{\theta t} + \gamma(\lambda+1)B_{\theta,t-1} + \varepsilon_t$, что эквивалентно (с точки зрения структуры) исходному уравнению (отметим, что $\alpha - \lambda\gamma = -\lambda\mu_1$.) Аналогично, (6) с обратным скачком принимает вид $\Delta y_t = (\alpha + \gamma - \delta) + \lambda y_{t-1} - \gamma B_{\theta t} + \delta B_{\theta,t-1} + \varepsilon_t$. Следовательно, распределения $\tau'_{\mu NL}$ и $\tau'_{\mu P}$ совпадают с распределениями $\tau_{\mu NL}$ и $\tau_{\mu P}$, соответственно.

Иная картина, если имеется выделенный базовый уровень $\mu = 0$, т.е. когда мы имеем дело с моделью (3) или (7). Выраженные в терминах $B_{\theta t}$, эти модели с обратным скачком преобразуются в вид, сходный с соответствующими моделями с

константой, (2) и (6), но с наложенным на константу ограничением. Для (3) получаем $\Delta y_t = \lambda y_{t-1} + \gamma B'_{\theta t} - \gamma(\lambda+1)B'_{\theta,t-1} + \varepsilon_t = -\lambda\gamma + \lambda y_{t-1} - \gamma B_{\theta t} + \gamma(\lambda+1)B_{\theta,t-1} + \varepsilon_t$, что с точностью до знаков совпадает с (2), за исключением нелинейного ограничения $\alpha = -\lambda\gamma$. Такое ограничение оказывается линейным, $\alpha = \gamma - \delta$, для модели перроновского типа (7) с обратным скачком: $\Delta y_t = \lambda y_{t-1} + \gamma B'_{\theta t} - \delta B'_{\theta,t-1} + \varepsilon_t = (\gamma - \delta) + \lambda y_{t-1} - \gamma B_{\theta t} + \delta B_{\theta,t-1} + \varepsilon_t$. В результате распределения τ'_{0NL} и τ'_{0P} отличаются от распределений τ_{0NL} и τ_{0P} . Их левые хвосты (для $T = 50$) показаны на рис. 7.

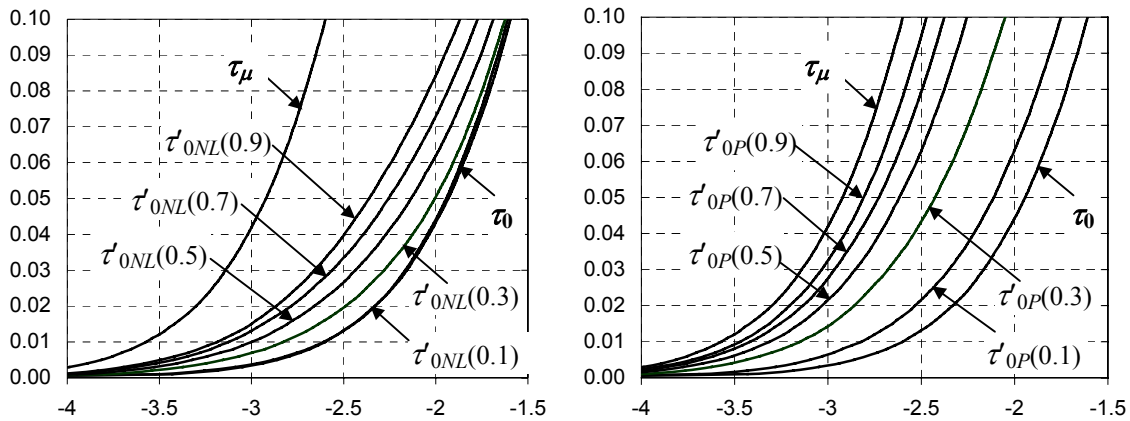


Рис. 7. – Левые хвосты функций распределения $\tau'_{0NL}(\theta)$ и $\tau'_{0P}(\theta)$; $T = 50$

Качественно картина напоминает поведение τ_{0NL} и τ_{0P} при замене θ на $1 - \theta$. Отсюда можно было бы предположить, что распределения $\tau'_{0NL}(\theta)$ и $\tau'_{0P}(\theta)$ те же, что распределения $\tau_{0NL}(1 - \theta)$ и $\tau_{0P}(1 - \theta)$. Однако это не так. Распределения для обратных скачков несколько сдвинуты в направлении распределения τ_0 . Например, распределение $\tau'_{0NL}(0.1)$ почти совпадает с ним, тогда как распределение $\tau_{0NL}(0.9)$ – нет. При значимости теста 10% и $T = 50$, $\tau'_{0NL}(0.98) = -1.892$ и $\tau_{0NL}(0.02) = -1.957$. В случае статистики Перрона сдвиг растёт по θ : при значимости теста 10% и $T = 50$, $\tau'_{0P}(0.9) = -2.473$ и $\tau_{0P}(0.1) = -2.562$, тогда как $\tau'_{0P}(0.1)$ и $\tau_{0P}(0.9)$ близки друг к другу. Отсюда следует, что в случае обратного скачка и модели без константы нужны критические значения, отличные от указанных в табл. III. Для

экономии места они не приводятся.

4. ОЦЕНКИ МОЩНОСТИ

Порождающий данные процесс для исследования мощности тестов – (1). А именно, временные ряды генерируются как $y_t = \alpha + (\lambda + 1)y_{t-1} + \gamma(B\alpha - (\lambda+1)B\alpha_{t-1}) + \varepsilon_t$; использованы 200000 повторений при $\varepsilon_t \sim \text{iid } N(0,1)$. Номинальная значимость тестов принята равной 5%; конечно-выборочные критические значения берутся из табл. I и III. Мощность тестов исследуется при $\lambda = -0.2, -0.1, -0.05$ и -0.01 ; $\lambda = 0$ используется для оценки значимости тестов. Принятые значения константы – $\alpha = 0, 0.5$ и 1 (при $\lambda = 0$ α всегда нуль). В табл. V приведены результаты для $T = 100, \Theta = 0.5, y_0 = 0$ и $\gamma = 0, 1, 2, 3, 5$.

ТАБЛИЦА V.

Мощность тестов значимостью 0.05 для $T = 100$ и $\Theta = 0.5$

	$\lambda = -0.2$			$\lambda = -0.1$			$\lambda = -0.05$			$\lambda = -0.01$			$\lambda = 0$		
Тест:	τ_0	τ_{0NL}	τ_{0P}	τ_0	τ_{0NL}	τ_{0P}	τ_0	τ_{0NL}	τ_{0P}	τ_0	τ_{0NL}	τ_{0P}	τ_0	τ_{0NL}	τ_{0P}
$\alpha = 0$															
$\gamma=0$	0.998	0.989	0.937	0.771	0.700	0.438	0.324	0.298	0.172	0.080	0.078	0.067	0.051	0.050	0.051
$\gamma=1$	0.986	0.989	0.937	0.698	0.700	0.436	0.304	0.298	0.172	0.080	0.079	0.068	0.050	0.050	0.051
$\gamma=2$	0.861	0.989	0.938	0.507	0.701	0.439	0.254	0.299	0.174	0.078	0.078	0.067	0.051	0.050	0.051
$\gamma=3$	0.473	0.989	0.936	0.286	0.701	0.440	0.189	0.298	0.174	0.076	0.078	0.069	0.051	0.050	0.052
$\gamma=5$	0.009	0.990	0.937	0.037	0.701	0.438	0.074	0.297	0.173	0.067	0.078	0.069	0.051	0.051	0.052
Тест:	τ_μ	$\tau_{\mu NL}$	$\tau_{\mu P}$	τ_μ	$\tau_{\mu NL}$	$\tau_{\mu P}$	τ_μ	$\tau_{\mu NL}$	$\tau_{\mu P}$	τ_μ	$\tau_{\mu NL}$	$\tau_{\mu P}$	τ_μ	$\tau_{\mu NL}$	$\tau_{\mu P}$
$\alpha = 0.5$															
$\gamma=0$	0.903	0.870	0.720	0.429	0.397	0.267	0.226	0.186	0.122	0.065	0.050	0.021	0.051	0.051	0.051
$\gamma=1$	0.834	0.868	0.720	0.382	0.397	0.267	0.202	0.187	0.124	0.056	0.050	0.021	0.050	0.050	0.051
$\gamma=2$	0.637	0.868	0.718	0.298	0.396	0.266	0.167	0.185	0.121	0.048	0.050	0.021	0.048	0.050	0.050
$\gamma=3$	0.367	0.869	0.719	0.206	0.397	0.265	0.130	0.185	0.122	0.038	0.050	0.020	0.046	0.051	0.051
$\gamma=5$	0.041	0.867	0.719	0.069	0.396	0.265	0.068	0.184	0.121	0.021	0.050	0.022	0.038	0.050	0.050
$\alpha = 1$															
$\gamma=0$	0.965	0.936	0.829	0.758	0.675	0.458	0.677	0.593	0.253	0.206	0.179	0.025	0.050	0.050	0.051
$\gamma=1$	0.928	0.935	0.829	0.705	0.672	0.459	0.634	0.592	0.253	0.192	0.178	0.026	0.050	0.050	0.051
$\gamma=2$	0.811	0.936	0.828	0.620	0.674	0.458	0.581	0.591	0.253	0.177	0.179	0.026	0.049	0.052	0.051
$\gamma=3$	0.593	0.936	0.828	0.511	0.672	0.458	0.520	0.591	0.253	0.156	0.180	0.025	0.045	0.050	0.050
$\gamma=5$	0.136	0.936	0.830	0.271	0.673	0.457	0.367	0.591	0.251	0.104	0.179	0.025	0.038	0.049	0.050

Как видно из табл. V (как и из табл. VI и VII ниже), нелинейный тест всегда доминирует над линейным. Естественно, когда скачка в ряде нет ($\gamma = 0$), тест Дик-

ки-Фуллера оказывается более мощным, чем оба теста, предполагающие наличие скачка, так как соответствующие модели более адекватно описывают процесс, чем модели со скачком. Но мощность как нелинейного, так и линейного тестов инвариантна к величине γ , в то время как мощность теста Дикки-Фуллера снижается с ростом γ . Таким образом, существует некоторое значение γ , при котором тесты, предполагающие скачок, начинают доминировать над тестом Дикки-Фуллера. При $T=100$ для нелинейного теста это значение, превосходящее 1, или, в терминах σ – стандартного отклонения ошибок, $\gamma > \sigma$. Чтобы линейный тест проявил преимущество над тестом Дикки-Фуллера, величина γ должна превышать по меньшей мере два стандартных отклонения остатков регрессии (например, при $\lambda = -0.05$ и $\alpha = 1$ τ_{μ} -тест имеет большую мощность, чем $\tau_{\mu P}$ -тест даже при $\gamma = 5$).

Свойства мощности тестов, предполагающих скачок, в некоторых отношениях такие же, как у теста Дикки-Фуллера. Мощность $\tau_{\mu NL}$ - и $\tau_{\mu P}$ -теста возрастает с ростом абсолютного значения константы, как и мощность τ_{μ} -теста. И, подобно тесту Дикки-Фуллера, тесты, предполагающие скачок, имеют низкую мощность вблизи единичного корня. Так, если $\lambda = -0.01$, мощность всех тестов без константы составляет около 7-8% (при $T = 100$); для тестов с константой, когда $\alpha = 0.5$, она даже меньше (отметим, что в этом случае $\tau_{\mu P}$ -тест смещён, имея мощность меньше значимости для обоих значений α).

ТАБЛИЦА VI.

Мощность тестов значимостью 0.05 для $T = 100$ и $\Theta = 0.1, 0.9$

Тест	$\lambda = -0.2$		$\lambda = -0.1$		$\lambda = -0.05$		$\lambda = -0.01$		$\lambda = 0$	
	$\Theta = 0.1$	$\Theta = 0.9$	$\Theta = 0.1$	$\Theta = 0.9$	$\Theta = 0.1$	$\Theta = 0.9$	$\Theta = 0.1$	$\Theta = 0.9$	$\Theta = 0.1$	$\Theta = 0.9$
τ_{0NL}	0.984	0.996	0.649	0.750	0.276	0.312	0.076	0.078	0.049	0.050
τ_{0P}	0.867	0.994	0.321	0.691	0.121	0.280	0.059	0.076	0.050	0.050
$\tau_{\mu NL}$	0.958	0.953	0.748	0.731	0.674	0.647	0.207	0.189	0.050	0.049
$\tau_{\mu P}$	0.846	0.932	0.357	0.669	0.229	0.556	0.090	0.123	0.050	0.050

Примечание: для τ_{0NL} и τ_{0P} , $\alpha = 0$; для $\tau_{\mu NL}$ и $\tau_{\mu P}$, $\alpha = 1$; $\gamma = 0$; $y_0 = 0$.

Табл. VI, в которой приведены результаты оценок мощности для $\Theta = 0.1$ и $\Theta = 0.9$, в сочетании с табл. V показывает зависимость мощности тестов от Θ . Как и распределения в условиях нулевой гипотезы, распределения в условиях альтернативных гипотез зависят от Θ . Поэтому влияние Θ на мощность тестов определяется относительным положением соответствующих «нулевого» и «альтернативного» распределений. Вкратце оно состоит в том, что мощность как τ_{0NL} -теста, так и τ_{0P} -теста увеличивается с ростом Θ . Причина в том, что ширина обоих семейств альтернативных распределений довольно мала, и поэтому горизонтальные расстояния между критическими значениями для различных величин Θ при данной значимости теста играют гораздо меньшую роль, чем вертикальные расстояния между альтернативными распределениями для различных Θ .

В общем, эта же причина объясняет и поведение мощности $\tau_{\mu NL}$ -теста. Мощность данного теста имеет минимум приблизительно при $\Theta = 0.5$; она возрастает, когда Θ изменяется от 0.5 в любую сторону (напомним, что при данной значимости теста критические значения $\tau_{\mu NL}$ -теста движутся влево при изменении Θ от 0 до примерно 0.5-0.6, а затем – при росте Θ до 1 – они движутся вправо). Мощность $\tau_{\mu P}$ -теста ведёт себя по-другому: она растёт с ростом Θ , как и в случае τ_{0P} -теста, но по совершенно иной причине. Ширина семейства альтернативных распределений сравнима с шириной семейства нулевых распределений $\tau_{\mu P}(\Theta)$. В то же время семейство альтернативных распределений не обладает симметрией относительно $\Theta = 0.5$. Хотя сдвиги вправо при изменении Θ от примерно 0.7 до 1 имеют место, они малы, т.е. альтернативное распределение для $\Theta = 0.9$ расположено между распределениями для $\Theta = 0.5$ и $\Theta = 0.4$. Поэтому, хотя критические значения $\tau_{\mu P}$ -теста для, скажем, $\Theta = 0.1$ и $\Theta = 0.9$, почти равны, вертикальное расстояние между соответствующими альтернативными распределениями при данном критическом значении оказывается существенным, тем самым обуславливая рост мощности для больших Θ .

Как и следовало ожидать, мощность τ_{0NL} - и τ_{0P} -теста растёт, когда y_0 отлично от нуля (детерминированно или случайно). Мощность растёт с ростом y_0 (по абсо-

лютой величине), если y_0 фиксирован, или его среднего или/и дисперсии, если y_0 случайное число. Наряду с этим, в согласии с рис. 6, ненулевое начальное условие вызывает искажения значимости теста (ниже номинального уровня) в τ_{0NL} - и τ_{0P} -тесте, что становится ощутимым начиная со значений фиксированного y_0 около трёх стандартных отклонений остатков регрессии. Поскольку нулевые распределения тестовых статистик, связанных с уравнениями с константой, $\tau_{\mu NL}$ и $\tau_{\mu P}$, инвариантны к начальному условию, его изменение не меняет значимость соответствующих тестов. Поведение мощности этих тестов в зависимости от y_0 несколько сложнее, как и у τ_{μ} -теста Дикки-Фуллера. В зависимости от конкретного сочетания значений α и y_0 , мощность может либо расти, либо снижаться.

Следуя Evans and Savin (1984), начальное условие можно включить в константу. Вычитание y_0 из обеих сторон (2) или (6) даёт преобразованную модель $\Delta z_t = (\alpha + \lambda y_0) + \lambda z_{t-1} + \gamma B_{\theta t} - \delta B_{\theta t-1} + \varepsilon_t$, где $z_t = y_t - y_0$ (следовательно, $z_0 = 0$); в случае $\tau_{\mu NL}$ -теста $\delta = \gamma(\lambda + 1)$. Таким образом, исходное уравнение с произвольным начальным условием эквивалентно уравнению с тождественно равным нулю начальным условием и изменённой константой. При $y_0 = 0$ мощность $\tau_{\mu NL}$ - и $\tau_{\mu P}$ -теста растёт с ростом $|\alpha|$. Аналогично, когда $y_0 \neq 0$, мощность растёт с ростом $|\alpha + \lambda y_0|$. Таким образом, мощность тестов как функция y_0 симметрична относительно $y_0 = -\alpha/\lambda$, имея минимум в данной точке. По сравнению со случаем $y_0 = 0$, мощность уменьшается, если $y_0 \in (0, -2\alpha/\lambda)$, и растёт в противном случае (исключая точки равенства 0 и $-2\alpha/\lambda$). Так, при $\alpha = 1$ и $\lambda = -0.1$ отрицательные начальные значения и значения больше 20 увеличивают мощность тестов, тогда как положительные значения меньше 20 – уменьшают.

И, наконец, табл. VII показывает рост мощности нелинейного и линейного тестов при увеличении объёма выборки от 50 до 200. Этот диапазон покрывает объёмы выборок, типичные в экономических приложениях. Обращает на себя внимание, что все три теста с константой смещены при $\lambda = -0.01$ для $T = 50$. В то же время, их мощность становится удовлетворительной в этой точке для $T = 200$, исключая $\tau_{\mu P}$ -тест, мощность которого остаётся довольно низкой.

ТАБЛИЦА VII.

Мощность тестов значимостью 0.05 для $T = 50$ и 200 ; $\Theta = 0.5$

Тест	$\lambda = -0.2$		$\lambda = -0.1$		$\lambda = -0.05$		$\lambda = -0.01$		$\lambda = 0$	
	$T=50$	$T=200$	$T=50$	$T=200$	$T=50$	$T=200$	$T=50$	$T=200$	$T=50$	$T=200$
τ_0	0.777	1.000	0.325	0.998	0.143	0.761	0.061	0.119	0.049	0.050
τ_{0NL}	0.645	1.000	0.268	0.993	0.130	0.728	0.061	0.119	0.050	0.050
τ_{0P}	0.436	1.000	0.167	0.934	0.093	0.435	0.057	0.087	0.050	0.051
τ_μ	0.559	1.000	0.380	0.992	0.279	0.958	0.039	0.823	0.050	0.051
$\tau_{\mu NL}$	0.449	1.000	0.239	0.986	0.173	0.944	0.024	0.813	0.050	0.052
$\tau_{\mu P}$	0.336	1.000	0.163	0.917	0.072	0.698	0.009	0.157	0.050	0.051

Примечание: для τ_0, τ_{0NL} и τ_{0P} , $\alpha = 0$; для $\tau_\mu, \tau_{\mu NL}$ и $\tau_{\mu P}$, $\alpha = 1$; $\gamma = 0$; $y_0 = 0$.

5. ЭМПИРИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом разделе предложенный нелинейный тест применён для анализа интеграции рынка товаров в России, используя данные из работы Gluschenko (2004). Рынок региона считается интегрированным с национальным рынком, если выполняется закон единой цены, т.е. если $P_{rt} \equiv \ln(p_{rt}/p_{0t}) = 0$, где p_{rt} – цена товара в регионе r , p_{0t} – его цена для страны в целом, t – месяц. Конечно, может иметься постоянное (равновесное) ненулевое различие цены $P_{rt} = a$. Но беда в том, что величина a может отражать эффект как «естественных», неустранимых препятствий торговле, совместимых с понятием интеграции (например, транспортные издержки), так и искусственных, преходящих препятствий, противодействующих интеграции рынка (например, региональный протекционизм). Но в рамках модели с единственной переменной разделить эти эффекты невозможно. Именно поэтому в качестве критерия интеграции принято строгое равенство цен, при этом любое детерминированное различие цен интерпретируется как признак неинтегрированности. В этом случае задача состоит в проверке того, выполняется ли $P_{rt} = 0$ для $t = 0, \dots, T$, т.е. в тестировании стационарности $\{P_{rt}\}$ относительно нулевого уровня, используя модель без константы.

Рассматриваемый период времени – с января 1994 г. по декабрь 2000 г. (таким образом, $T = 83$). В августе 1998 г. в России произошёл финансовый кризис, обу-

словивший скачки траекторий цен в некоторых регионах страны. Поскольку нас интересует интеграция рынка в последние годы, а не в предкризисный период, скачок моделируется как обратный с помощью переменной $B'_{\theta t}$ (таким образом, предполагается, что скачок направлен в сторону паритета цен). Цена представлена стоимостью набора 25 основных продуктов питания. Из всех имеющихся 75 региональных временных рядов здесь рассматриваются только четыре, обозначенные для краткости как А, В, С и D (это – Рязанская, Ульяновская, Липецкая области и Хабаровский край), они иллюстрируют четыре возможных случая: стационарность или нестационарность и значимый или незначимый скачок.

Момент скачка различается по регионам, меняясь от августа 1998 г. до февраля 1999 г. (в терминах θ , от 54 до 60; в терминах Θ , от 0.65 до 0.72). Момент скачка находился путём оценки регрессии (3) для $\theta = 54, \dots, 60$ с последующим выбором θ , минимизирующим сумму квадратов остатков регрессии. В случае незначимости скачка в качестве альтернативной спецификации использовалась стандартная модель AR(1): $\Delta y_t = \lambda y_{t-1} + \varepsilon_t$. Для сравнения оценивалась также модель перроновского типа (7) с применением такого же способа нахождения момента скачка.

Когда мы имеем дело с реальными процессами, нельзя быть уверенным, что они относятся к классу AR(1). Поэтому для устранения эффектов возможной автокорреляции из остатков использовалось преобразование Филлипса (Phillips, 1987) $Z_t(\tau_{0NL})$, $Z_t(\tau_{0P})$ и $Z_t(\tau_0)$ с применением автоматического выбора лаговой последовательности по Newey-West (1994) при спектральном ядре Бартлетта (в случае модели AR(1), это тест Филлипса-Перрона). Конечно, неизвестно, применим ли такой метод к тестам, учитывающим скачок. Тем не менее, ряд проведённых экспериментов создаёт впечатление, что он работает.

Результаты оценки представлены в табл. VIII. Для модели (3) τ означает τ_{0NL} ; для (7) – τ_{0P} , для AR(1) – τ_0 ; σ обозначает стандартное отклонение остатков регрессии; p -значения для γ и δ – из обычного t -теста; с.о. – стандартная ошибка оценки.

ТАБЛИЦА VIII.

ЭМПИРИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мо- дель	λ (с.о.)	τ	p -зна- чение	$Z_t(\tau)$	p -зна- чение	γ (с.о.)	p -зна- чение	δ (с.о.)	p -зна- чение	σ
Ряд А; $\theta + 1 = 1998:09$										
(3)	-0.153 (0.060)	-2.548	0.022	-2.701	0.017	-0.083 (0.019)	0.000			0.025
(7)	-0.161 (0.060)	-2.698	0.050	-2.698	0.050	-0.055 (0.026)	0.036	0.038 (0.025)	0.133	0.025
AR(1)	-0.036 (0.030)	-1.188	0.213	-1.237	0.197					0.026
Ряд В; $\theta + 1 = 1998:12$										
(3)	-0.032 (0.015)	-2.058	0.055	-2.386	0.031	0.053 (0.058)	0.363			0.058
(7)	-0.088 (0.034)	-2.609	0.062	-2.653	0.057	0.054 (0.057)	0.349	-0.080 (0.058)	0.168	0.057
AR(1)	-0.035 (0.017)	-2.088	0.036	-2.381	0.018					0.058
Ряд С; $\theta + 1 = 1998:09$										
(3)	-0.019 (0.016)	-1.210	0.209	-1.405	0.155	0.084 (0.036)	0.024			0.036
(7)	-0.089 (0.039)	-2.307	0.109	-2.149	0.144	0.082 (0.036)	0.024	-0.098 (0.036)	0.008	0.035
AR(1)	-0.026 (0.021)	-1.219	0.203	-1.090	0.248					0.037
Ряд D; $\theta + 1 = 1998:12$										
(3)	-0.025 (0.022)	-1.141	0.233	-0.964	0.298	0.068 (0.046)	0.139			0.045
(7)	-0.094 (0.049)	-1.893	0.221	-1.283	0.436	0.070 (0.045)	0.124	-0.043 (0.046)	0.352	0.045
AR(1)	-0.021 (0.018)	-1.142	0.229	-1.093	0.247					0.045

Ряд А нельзя признать стационарным при использовании тестов Дикки-Фуллера и Филлипса-Перрона. Но гипотеза единичного корня легко отвергается на уровне значимости 5%, если учесть структурный скачок. Скачок весьма значим, имея высоту 3.3σ . Отрицательность γ показывает, что финансовый кризис вызвал увеличение относительной цены в этом регионе, приблизив её к среднероссийской величине. В ряде В скачок оказывается незначимым (тогда как единичный корень отвергается на уровне значимости 10%). Следовательно, для этого случая более адекватна обычная модель AR(1). Для неё единичный корень отвергается на уровне значимости 5%. Ряд С демонстрирует случай, когда единичный корень не может быть отвергнут и скачок значим. Таким образом, это нестационарный процесс со скачком. Наконец, в ряде D при использовании модели, учитывающей скачок, имеется единичный корень и скачок незначим; тесты Дикки-Фуллера и Филлипса-Перрона говорят о нестационарности этого ряда.

В табл. VIII нелинейная модель и модель перроновского типа дают качественно схожие картины. Но в общем их результаты существенно расходятся. Для всех 75 проанализированных рядов статистический вывод относительно единичного корня был различен для 14 или 19%. Вывод о значимости скачка был противо-

положен для 29% рядов. Модель перроновского типа и нелинейная модель давали минимальную сумму квадратов остатков регрессии для различных моментов времени у 45% рядов. Правда, у 20% моменты скачка были смежными, таким образом, имелось 25% существенных расхождений относительно выбора момента скачка.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной работе было показано, что уравнения перроновского типа, широко используемые для тестирования временных рядов со структурным скачком на единичный корень, фактически являются приближением нелинейных моделей. Использование этих, более адекватных моделей даёт тест с лучшими свойствами, в том числе – с большей мощностью. В то время как асимптотическое распределение статистики Перрона зависит от момента скачка, тестовые статистики нелинейного теста имеют одно и то же асимптотическое распределение для всех возможных точек скачка; более того, оно оказывается распределением Дикки-Фуллера.

Это напоминает случай возмущений, отличных от $AR(1)$ при тестировании на единичный корень рядов без скачка. Казалось бы, имея дело со, скажем, $AR(d)$, мы должны иметь отдельные распределения для каждого d . Но если свойства ошибок регрессии должным образом учтены включением дополнительных лагов, как в усиленном тесте Дикки-Фуллера, или применением преобразования Филлипса (Phillips, 1987) к t -отношению, как в тесте Филлипса-Перрона, то оказывается применимым распределение Дикки-Фуллера. Аналогично, адекватный учёт «детерминированного возмущения» делает применимым распределение Дикки-Фуллера для данного случая.

Очевидны два направления дальнейших исследований. Первое – изучение более общих случайных возмущений, чем $AR(1)$, с тем, чтобы определить, применимо ли преобразование Филлипса тестовой статистики (или включение в модель дополнительных лагов) в случае нелинейных тестовых уравнений. Предварительные результаты говорят, что это может быть так, но для уверенного заключения нужны более обширные числовые эксперименты. Второе направление – изучение временных рядов с трендом, имеющих структурный скачок. Поскольку в этом случае возможны

три типа скачка (изменение константы, изменение наклона тренда и комбинация обоих изменений), то интересно, как статистика нелинейного теста отличается для этих типов. Исходя из того, что асимптотические распределения статистики Перрона для $\Theta = 0$ и $\Theta = 1$ совпадают с распределением Дикки-Фуллера, связанным с регрессией связанным с регрессией, включающей константу и тренд, можно ожидать, что статистика нелинейного теста будет иметь в качестве предельного дикки-фуллеровское распределение для всех трёх типов скачка.

БЛАГОДАРНОСТИ

Выражаю свою признательность Дэвиду Н. Дейонгу, Пьеру Перрону и Александру Цыплакову за полезные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

- Bartley, W.A., Lee, J., and Strazicich, M.C. (2001), "Testing the null of cointegration in the presence of a structural break," *Economics Letters*, 73, 315–323.
- Dickey, D.A., and Fuller, W.A. (1979), "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root," *Journal of the American Statistical Association*. 74, 427-431.
- Evans, G.B.A., and Savin, N.E. (1981), "Testing for Unit Roots: 1," *Econometrica*, 49, 753-779.
- (1984), "Testing for Unit Roots: 2," *Econometrica*, 52, 1241-1270.
- Gluschenko, K. (2004), "Integration of the Russian Market: Empirical Analysis," *EERC Working paper* No. 04/06.
- Hansen, B.E. (1997), "Approximate Asymptotic P Values for Structural-Change Tests," *Journal of Business and Economic Statistics*, 15, 60-67.
- (2001), "The New Econometrics of Structural Change: Dating Breaks in U.S. labor productivity," *Journal of Economic Perspectives*, 15, 117-128.
- Lanne, M., Lütkepohl, H., and Saikkonen, P. (2002), "Comparison of Unit Root Tests for Time Series With Level Shifts," *Journal of Time Series Analysis*, 23 (6), 667-685.
- MacKinnon, J. G. (1996), "Numerical Distribution Functions for Unit Root and Cointegration Tests," *Journal of Applied Econometrics*, 11, 601-618.
- Müller, U.K., and Elliott, G. (2003), "Tests for Unit Roots and the Initial Condition," *Econometrica*, 71, 1269-1286.
- Newey, W. K., and West, K. D. (1994), "Automatic Lag Selection in Covariance Matrix

- Estimation,” *Review of Economic Studies*, 61, 631-653.
- Perron, P. (1989), “The Great Crash, the Oil Price Shock, and The Unit Root Hypothesis,” *Econometrica*, 57, 1361-1401.
- (1990), “Testing for a Unit Root in a Time Series with a Changing Mean,” *Journal of Business and Economics Statistics*, 8, 153-162.
- Perron, P., and Vogelsang, T.J. (1992), “Nonstationarity and Level Shifts with an Application to Purchasing Power Parity,” *Journal of Business and Economics Statistics*, 10, 301-320.
- Phillips, P.C.B. (1987), “Time Series Regression with a Unit Root,” *Econometrica*, 55, 277-301.
- Rappoport, P., and Reichlin, L. (1989), “Segmented Trends and Non-Stationary Time Series,” *Economic Journal*, 99 (395), 168-177.
- Quantitative Micro Software, LLC (2004), *EViews 5 User’s Guide*.

Программы, работающие с эконометрическим пакетом EViews, для оценки и тестирования AR(1) со скачком, а также оценки критических значений и исследования свойств мощности теста можно найти на странице автора в Интернете: http://econom.nsu.ru/staff/chair_et/gluschenko/econometrics.htm .